Université de la Polynésie française **Année 2024-2025**
Département de Mathématiques **Licence 1 Maths et SPI**

Calcul intégral

Fiche 2 : Intégration par parties et changement de variables

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 xe^x \, dx \quad \text{et} \quad J = \int_1^e x^2 \ln x \, dx.$$

Exercice 2 Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur des intervalles adequats :

$$x \mapsto \arctan(x), \quad x \mapsto (\ln x)^2, \quad 3. \, x \mapsto \sin(\ln x).$$

Exercice 3 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x} \, dx \quad \text{et} \quad \int_0^\pi e^x \sin x \, dx.$$

Exercice 4 On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.

1. Décomposer la fraction rationnelle $f(x)$ en éléments simples.
2. Calculer $\int_1^2 f(x) \, dx$.
3. Calculer $\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} \, dt$.

Exercice 5 Pour $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^\pi e^{-nx} \sin(x) \, dx$ et $J_n = \int_0^\pi e^{-nx} \cos(x) \, dx$.

1. En intégrant par parties de deux façons différentes, établir que, pour tout $n \geq 1$, $I_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ$ et $I_n = \frac{1}{n} J_n$.
2. En déduire les valeurs de I_n et J_n.

Exercice 6 En effectuant le changement de variables demandé, calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$ en posant $x = \sqrt{t}$.
2. $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,dt$ en posant $x = \cos t$.
3. $\int_1^e \frac{dt}{2t\ln(t)+t}$ en posant $x = \ln t$.
4. $\int_0^1 \frac{dt}{1+e^t}$ en posant $x = e^t$.
5. $\int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{t+1}\,dt$ en posant $x = \sqrt{t}$.
6. $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$ en posant $x = \sin t$.

Exercice 7 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,dx$ (IPP).
2. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$ (chgt var. simple).
3. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$ (chgt var. $x = \tan(t)$).
4. $\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}\,dx$ (décomposition en élt. simples).
5. $\int_{\frac{1}{2}}^2 (1+\frac{1}{x^2})\arctan x\,dx$ (changement de variable $u = \frac{1}{x}$).

Exercice 8 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin(x)}\,dx$.
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}\,dx$.

Exercice 9 Intégrales de Wallis

Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n\,dx$ pour ≥ 1.

1. Montrer que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$. Expliciter I_n et en déduire $\int_{-1}^1 (1-x^2)^n\,dx$.
2. Montrer que I_n est positive et décroissante. Montrer que $I_n \sim I_{n+1}$
3. Simplifier $I_n.I_{n+1}$. Montrer $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. En déduire $\frac{1.3\cdots(2n+1)}{2.4\cdots(2n)} \sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$.